

TD - Dimension finie

Espaces vectoriels

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel et soit x, y, z une famille libre de E . Montrer que la famille $x + y, y + z, z + x$ est également libre.

Exercice 2

Prouver que l'ensemble :

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z + t = x - y + 2z - 2t = 0\}$$

est un espace vectoriel. En déterminer une base, ainsi que la dimension.

Exercice 3

Les familles suivantes sont-elles génératrices de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$?

- a) $(1, -1, 0); (2, -1, -3)$
- b) $(1, -1, 0); (-2, 2, 0)$
- c) $(1, -1, 0); (2, 1, -3)$
- d) $(1, -1, 0); (2, 1, -3); (-1, 0, 1)$
- e) $(1, -1, 0); (2, 1, -3); (1, 0, 1)$

Exercice 4

Calculer le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivante :

$$(2, 1, 4, 3); (0, 3, -1, 2); (4, 1, 2, 1); (8, 6, 9, 9); (-6, -1, 0, 1)$$

Déterminer une base de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

Exercice 5

Dans $E = \mathbb{R}_2[x]$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2, on considère f vérifiant $|f(0)| \leq 1$, $|f(1)| \leq 1$ et $|f(-1)| \leq 1$.

a) Vérifier que la famille $\mathcal{B} = \left(\frac{1}{2}x(x+1), \frac{1}{2}x(x-1), 1-x^2\right)$ est une base de E et décomposer f dans $\mathcal{B}$.

b) En déduire que si $|x| \leq 1$, alors $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$.

On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$ et on prend g l'élément de E donné par $g(x) = cx^2 + bx + a$.

c) Déterminer la base $\mathcal{B}'$ de E telle que les coordonnées de g dans $\mathcal{B}'$ soient les coordonnées de f dans $\mathcal{B}$.

d) En déduire que pour $|x| \leq 1$, on a $|g(x)| \leq 2$. (Ina 2006)

Exercice 6

On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 f''(x) - 4x f'(x) + 6f(x) = 0$$

- a) Vérifier que l'ensemble E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- b) Déterminer les fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$ appartenant à l'espace vectoriel E .
- c) Soit f un élément de E . on définit une application g de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$, et que g'' est nulle.
- d) En déduire la dimension et une base de l'espace vectoriel E . (Ina 2006)

Systèmes linéaires**Exercice 7**

Résoudre les systèmes suivants ($j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$)

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ x - y = -1 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases} & 2) \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases} & 4) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + jy + j^2z = j \\ x + j^2y + jz = j^2 \end{cases} \\ 5) \begin{cases} x + 2y - z + 4t = 1 \\ -x + y - 2z - t = 2 \\ 2x + 3y - z + 7t = 1 \end{cases} & 6) \begin{cases} x + y - z + 2t = 0 \\ 7x + 3y + z + 2t = 4 \\ -6x - 4y + 2z - 6t = -1 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 8

Discuter et résoudre le système suivant en fonction des paramètres a et b :

$$\begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ ax - 3y + z + t = 2 \\ 5x - 5y + z + 4t = b \end{cases}$$

Exercice 9

Discuter et résoudre sur $\mathbb{C}$ le système suivant (a est un paramètre) :

$$\begin{cases} x - ay + a^2z = a \\ ax - a^2y + az = 1 \\ ax + y - a^3z = 1 \end{cases}$$

Exercice 10

Déterminer le noyau et l'image de la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11

Soient a, b deux complexes. Discuter le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a+b & b & a \\ a & a+b & b \\ b & a & a+b \end{pmatrix}$$

Applications linéaires**Exercice 12**

Déterminer le noyau et l'image de l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P)(X) = 2P(X) - XP'(X)$. (G2E 2002)

Exercice 13

Soit e_1, e_2, e_3, e_4 une base de $\mathbb{R}^4$. On définit une application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$ par $f(e_1) = (1, -1, 2)$, $f(e_2) = (-2, 5, 3)$, $f(e_3) = (-7, 16, 7)$ et $f(e_4) = (-3, 6, 1)$. Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 14

$\mathbb{R}[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n ($n \in \mathbb{N}$).

On considère :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto (4X+1)P(X) - (X-2)(X+1)P'(X) \end{aligned}$$

- Comparer le degré de $f(P)$ et celui de P .
- En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ unique tel que la restriction de f à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. On note alors φ cette restriction.
- Déterminer $\ker \varphi$ et montrer que $(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3))$ est une base de l'image de φ . (Ina 2004)

Exercice 15

E est un espace vectoriel de dimension $2n$. f est un endomorphisme de E tel que $f \circ f = 0$. Soient $u_1, u_2, \dots, u_n$ tels que $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$ soit libre.

- Montrer que $\dim(\operatorname{Im} f) \geq n$.
- Montrer que $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est libre.
- Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
- Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$. (Ina 2005)

Applications linéaires et matrices

Exercice 16

E et F sont deux espaces vectoriels rapportés respectivement aux bases $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ et $(f_1, f_2, \dots, f_n)$. u est l'application linéaire de E vers F dont la matrice dans les bases

précédentes est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

- Que valent n et p ?
- Donner une base de $\ker(u)$ et de $\text{Im}(u)$.
- Montrer qu'il existe une base de E et une base de F dans lesquelles la matrice de u est $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (Ina 2004)

Exercice 17

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et u un endomorphisme de E tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.

- On suppose que $\dim \ker u = 2$. Montrer d'abord que $\ker u = \ker u^2$ puis trouver une contradiction.
- En déduire $\dim \ker u$ et $\dim \text{Im } u$.
- Soit $a \notin \ker u^2$. Montrer que $(a, u(a), u^2(a))$ est une base de E et donner les matrices de u et u^2 dans cette base. (INA 2003)

Exercice 18

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On considère dans E les fonctions $f_1 : x \mapsto \sin x$, $f_2 : x \mapsto \cos x$, $f_3 : x \mapsto x \sin x$ et $f_4 : x \mapsto x \cos x$. On note $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ et $u : \begin{matrix} F & \rightarrow & F \\ f & \mapsto & f' \end{matrix}$.

- Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de F .
- Montrer que u est un endomorphisme de F et donner la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$.
- Montrer que A est inversible et expliciter A^{-1} . (Ina 2004)

Exercice 19

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. On note F l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $F(M) = AM - MA$.

- Justifier que I, J, K, L est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Prouver que F est un endomorphisme.
- Ecrire la matrice associée à F dans la base I, J, K, L .
- Déterminer le rang de F .

Bonus : pouvait-on prévoir que le rang de F serait ≤ 2 ? (Ina 2005)