

TD - Equations différentielles

Exercice 1

- a) Résoudre $y'' - y' - 2y = -e^{-x}$.
- b) Chercher les solutions f de cette équation telles que $x \mapsto f(|x|)$ soit une densité de probabilité.
- c) Chercher les solutions g de cette équation telles que $n \mapsto g(n)$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. (Ina 2004)

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x}$. (G2E 2003)

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle $(1 + x^2)y' + 2xy = \arctan x$. (G2E 2003)

Exercice 4

- a) Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y'' - y' + y = 0$.
- b) On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $(E_2) : \forall x > 0, f'(x) = f(\frac{1}{x})$.
 - (i) On pose $g(t) = f(e^t)$; montrer que g est solution de (E_1) .
 - (ii) Trouver les fonctions vérifiant (E_2) . (Ina 2004)

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit (S) le système différentiel suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(t) = 4f(t) - g(t) \\ g'(t) = 2f(t) + g(t) \end{cases}$$

On note également $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
- b) Soient u et v les applications définies par $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$. Montrer que u et v sont dérivables et solutions d'équations différentielles simples.
- c) Résoudre le système (S) . (Ina 2006)

Exercice 6

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$. (G2E 2005)

Exercice 7

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x, f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x - t)f(t)dt$.

- Montrer que les fonctions de $\mathcal{S}$ sont deux fois dérivables.
- Montrer que si f est dans $\mathcal{S}$, elle est solution d'une équation différentielle du deuxième ordre linéaire à coefficients constants.
- Déterminer $\mathcal{S}$. (Ina 2006)

Exercice 8

a) Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $u(0) = -u(1) = 1$. Calculer $\int_0^1 (u''(t) + \pi^2 u(t)) \sin(\pi t) dt$.

b) Trouver les valeurs de b telles que l'équation $\begin{cases} u''(t) + \pi^2 u(t) = -b \sin(\pi t) \\ u(0) = -u(1) = 1 \end{cases}$ ait au moins une solution. La résoudre alors.

c) Même question que b) avec $\begin{cases} u''(t) + \pi^2 u(t) = -b \sin(\pi t) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$ (Ina 2006)

Exercice 9

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle $(E_\alpha) : y'' - 2y' + 2y = \alpha e^{(1+i)x}$.

a) Pour quelle(s) valeur(s) de α l'ensemble $\mathcal{E}_\alpha$ des solutions de (E_α) est-il un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel? En donner alors une base.

b) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la solution générale de (E_α) .

c) On lance trois fois un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle a, b et c les résultats du premier, deuxième et troisième jet du dé. Quelle est la probabilité pour que la solution générale de l'équation différentielle $ay'' - by' + cy = 0$ soit dans $\mathcal{E}_0$? (Ina 2006)

Exercice 10

On considère l'équation différentielle suivante: $(1-t)g'(t) - t^2 g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}-t}$.

a) Donner les solutions de l'équation homogène sur $I =]-\infty, 1[$ et sur $J =]1, +\infty[$.

b) Donner une solution particulière sur I et J de la forme $g(t) = \lambda(t) \frac{e^{-\frac{t^2}{2}-t}}{1-t}$. En déduire les solutions générales de l'équation.

c) Existe-t-il des solutions de l'équation différentielle qui soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? (Ina 2006)

Exercice 11

(E) est une équation différentielle du second ordre homogène à coefficients constants. Il existe une seule solution de (E) de la forme $f(x) = e^{kx}$ où $k \in \mathbb{R}$ et il existe une solution g de (E) vérifiant $g(0) = g'(0) = g''(0) = 1$. Trouver (E) . (G2E 1999)